GRUP FAKTOR DARI SEMUA SUBGRUP SIKLIK DI GRUP $(\mathbf{Z}_n,+)$

Samsul Arifin

STKIP Surya
Email: samsul.arifin@stkipsurya.ac.id

Abstrak

$\mathbf{Z}_n$ *is a group under addition modulo n. Cyclic subgroup is subgroup that generated by one element of the group. In group* $(\mathbf{Z}_n,+)$*, all cyclic subgroup can be generated by a generator that is the factors of n. Therefore, we can find all their factors group. In this paper, we will determine factors group of all cyclic subgroup of group* $(\mathbf{Z}_n,+)$ *using Python.*

Key words: group $\mathbf{Z}_n$*, cyclic subgroup, factors group, Python*

1. PENDAHULUAN

Suatu grup adalah himpunan *G* dengan operasi biner *, sedemikian hingga berlaku tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers. Jika suatu grup memiliki sifat $a*b=b*a$,untuk setiap elemen *a* dan *b*, maka dikatakan bahwa grup tersebut komutatif. Sifat-sifat dasar mengenai grup dapat dipelajari di [1], [3] dan [5]. Grup Siklik adalah suatu grup yang setiap elemennya dapat ditulis sebagai perpangkatan dari setiap unsur tetap pada grup tersebut. Karakteristik dari grup siklik dapat dilihat di [4], [7] dan [8].

Subgrup adalah subhimpunan *H* di dalam grup *G* yang juga merupakan grup dengan operasi yang sama di *G*. Untuk suatu *a* elemen grup *G*, dapat dibentuk subhimpunan *S* berisi semua elemen *G* yang merupakan hasil perpangkatan dari elemen *a*. Subhimpunan *S* tersebut membentuk subgroup di *G*, dan disebut subgroup siklik yang dibangun oleh *a*. Ingat bahwa setiap grup siklik adalah grup komutatif dan subgrup dari suatu grup siklik juga siklik.

Himpunan semua bilangan bulat modulo *n*, dinotasikan dengan $\mathbf{Z}_n$, adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan modulo. Grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ ini sangat penting dalam mempelajari teori grup, karena banyak konsep dalam teori grup yang menggunakannya sebagai contoh. Grup $\mathbf{Z}_n$ dikonstruksi dengan menggunakan algoritma pembagian pada himpunan semua bilangan bulat □ . Proses pembentukan $\mathbf{Z}_n$ ini dapat dipelajari di [2].

Subgroup normal dari suatu grup adalah subgrup dengan sifat koset kiri sama dengan koset kanan. Grup faktor adalah himpunan semua koset kiri dan kanan dari suatu grup. Konsep subgrup normal dan grup faktor dapat dipelajari di [7]. Karena grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ adalah grup komutatif, maka semua subgrupnya adalah subgrup normal, sehingga dapat ditentukan semua grup faktornya.

Python adalah bahasa pemrograman yang multiguna dan mudah untuk dipelajari. Python juga dapat berjalan di berbagai platform system operasi, seperti Windows (lihat [9]), Linux, Mac OS, Android (lihat [10]), dan lain lain. Dalam tulisan ini akan dikaji penentuan grup faktor dari semua subgroup siklik di grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ dengan menggunakan bantuan pemrograman Python.

2. PENGERTIAN GRUP $\mathbf{Z}_n$ DAN SUBGRUP SIKLIK

Di sesi ini akan dikaji mengenai konstruksi dari grup $(\mathbf{Z}_n,+)$. Dalam tulisan ini diasumsikan bahwa operasi yang melekat pada $\mathbf{Z}_n$ adalah operasi penjumlahan modulo *n*. Berikut diberikan pengertian dari grup.

Definisi 2.1. Fraleigh [1].
Diberikan himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan operasi "$*$". Himpunan G disebut grup terhadap operasi "$*$" jika memenuhi empat aksioma berikut ini:

1. $(\forall a,b \in G)\, a*b \in G$
2. $(\forall a,b,c \in G)(a*b)*c = a*(b*c)$
3. $(\exists e \in G)(\forall a \in G)\, a*e = e*a = a$
4. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)\, a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

Suatu grup *G* dengan operasi "*", biasanya dinotasikan dengan $(G,*)$, tetapi boleh hanya ditulis G saja tanpa menuliskan operasi binernya. Dalam [7], telah dibuktikan bahwa elemen identitas dan elemen invers dari suatu grup adalah tunggal, berlaku sifat kanselasi dan berlaku sifat *Socks-Shoes*. Selanjutnya akan diberikan pengertian mengenai suatu grup khusus yang sangat penting dalam mempelajari teori grup, sebab banyak konsep dalam teori grup yang menggunakannya sebagai contoh. Grup tersebut dikonstruksi menggunakan algoritma pembagian pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Diberikan suatu $a \in \mathbb{Z}$ dan bilangan bulat positif $n \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan algoritma pembagian pada bilangan bulat, maka terdapat dengan tunggal $q,r \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga berlaku $a = qn + r$ dengan $0 \le r \le n-1$. Bilangan bulat *q* disebut dengan hasil bagi (quotient) dan bilangan bulat *r* disebut dengan sisa (residu). Sisa pembagian *r* dinotasikan dengan $r = a \bmod n$. Selanjutnya, diperkenalkan konsep mengenai kongruensi pada bilangan bulat sebagai berikut. Misalkan diberikan bilangan bulat $a,b \in \mathbb{Z}$ dan bilangan bulat positif $n \in \mathbb{N}$. Bilangan bulat *a* dikatakan kongruen *b* modulo *n* jika *n* membagi habis $a-b$, ditulis dengan $a \equiv b \pmod{n}$. Dapat dibuktikan bahwa kongruensi modulo *n* merupakan relasi ekuivalensi. Akibatnya, pada $\mathbb{Z}$ terpecah menjadi kelas-kelas yang saling asing. Untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$, dapat dibentuk kelas yang memuat *a*, yaitu $\overline{a} = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x \equiv a \pmod{n} \right\}$. Secara umum, jika diberikan bilangan bulat positif $n \in \mathbb{N}$, maka relasi ekuivalensi kongruen modulo *n* mempunyai *n* partisi yang saling asing pada $\mathbb{Z}$, yaitu $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ..., dan $\overline{n-1}$.

Dibentuk $\mathbb{Z}_n$ adalah himpunan semua kelas yang didapatkan dari relasi ekuivalensi kongruen modulo *n*, yaitu $\mathbb{Z}_n = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1} \right\}$. Pada himpunan $\mathbb{Z}_n$ didefinisikan operasi penjumlahan "+", yaitu untuk setiap $\overline{a},\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ didefinisikan $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a+b}$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_n,+)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitasnya adalah $\overline{0} \in \mathbb{Z}_n$.

Selanjutnya, akan dikaji mengenai subgrup siklik. Berikut adalah definisi dari grup siklik dan pembangun dari suatu grup.

Definisi 2.2. Adkins [6].
Suatu grup $(G,*)$ disebut grup siklik jika terdapat $g \in G$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ dapat dinyatakan sebagai $a = g^n$, untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Elemen $g \in G$ tersebut dinamakan dengan elemen pembangun atau generator dari G, dan G

dikatakan grup siklik yang dibangun oleh g, dinotasikan dengan $G = \langle g \rangle$.

Dari definisi grup siklik di atas, dapat dilihat bahwa grup siklik *G* yang dibangun oleh $g \in G$, yaitu $G = \langle g \rangle$ dapat dinyatakan sebagai $\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Lebih lanjut, setiap grup siklik adalah grup komutatif (lihat[1]). Perhatikan contoh berikut yang menunjukkan bahwa elemen pembangun suatu grup tidaklah tunggal.

Contoh 2.3.
Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{1024}, +)$ *dan berlaku:*

$$\mathbb{Z}_{1024} = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle = \langle 11 \rangle = \langle 13 \rangle.$$

Untuk mengujinya, misalnya menunjukkan 3 adalah pembangun, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{1024} &= \langle 3 \rangle \\ &= \{0, 3, 3+3, 3+3+3, \ldots\} \\ &= \{0, 3, , \ldots, 1023, 2, 5, \ldots, 1022, 1, 4, \ldots, 1021\} \\ &= \{0, 1, \ldots, 1023\}\end{aligned}$$

Di lain pihak, $256 \in \mathbb{Z}_{1024}$ *bukan pembangun karena* $\langle 256 \rangle = \{0, 256, 512, 768\} \neq \mathbb{Z}_{1024}$

Misalkan diberikan grup $(G, *)$ dan himpunan bagian tidak kosong $H \subseteq G$. Ingat bahwa himpunan *H* disebut subgrup dari *G* jika *H* juga merupakan grup terhadap operasi biner "$*$" yang sama pada grup *G*, dinotasikan dengan $H \leq G$.(lihat [3]). Rotman menjelaskan dalam [4] bahwa suatu subhimpunan dari suatu grup dapat diuji apakah merupakan subgroup atau bukan, yaitu misalkan diberikan grup $(G, *)$ dan *H* suatu subhimpunan tidak kosong dari *G*, maka *H* subgrup dari *G* jika dan hanya jika $(\forall a, b \in H)\, a * b^{-1} \in H$. Selanjutnya untuk suatu elemen $g \in G$, dapat dibentuk subhimpunan yang dibangun oleh *g* dan membentuk subgrup di *G*, yang tertuang dalam lemma berikut.

Lemma 2.4. Dummit [2].
Diberikan grup G dan $g \in G$*, maka* $\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ *merupakan subgrup dari G. Selanjutnya,* $\langle g \rangle$ *disebut dengan subgrup siklik dari G yang dibangun oleh g.*

Ingat bahwa order suatu subgrup adalah banyaknya elemen dari subgrup tersebut. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.5.
Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{2018}, +)$.

a) *Himpunan* $S_1 = \{0, 2, \ldots, 2016\}$ *adalah subgrup yang dibangun oleh* $2 \in \mathbb{Z}_{2018}$ *dengan order 1009.*
b) *Himpunan* $S_2 = \{0, 1009\}$ *adalah subgrup yang dibangun oleh* $1009 \in \mathbb{Z}_{2018}$ *dengan order 2.*

Misalkan diberikan sebarang $n, k \in \mathbf{Z}$. Perhatikan bahwa $FPB(n,k) = 1$ bermakna bahwa faktor persekutuan terbesar antara bilangan *n* dan *k* adalah 1. Berikut adalah lemma yang mengatakan bahwa pembangun dari grup $\mathbf{Z}_n$ adalah bilangan *k* sedemikian hingga berlaku $FPB(n,k) = 1$, serta subgrup-subgrup di grup $\mathbf{Z}_n$ adalah subhimpunan yang dibangun oleh faktor-faktor dari *n*.

Lemma 2.6. Gallian [7].

a) *Suatu* $k \in \mathbf{Z}_n$ *adalah pembangun dari* $\mathbf{Z}_n$ *jika dan hanya jika* $FPB(n,k) = 1$.
b) *Di grup* $\mathbf{Z}_n$*, untuk setiap pembagi positif* k *dari* n*, himpunan* $\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle$ *adalah subgrup tunggal di* $\mathbf{Z}_n$ *dengan order k.*

c) *Lebih lanjut, hanya* $\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle$ *subgrup-subgrup di* $\mathbf{Z}_n$.

Lemma tersebut menjamin bahwa semua subgroup siklik di grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ adalah subhimpunan yang dibangun oleh semua faktor dari *n*. Hal ini yang akan menjadi dasar dari penentuan semua grup faktor dari subgrup siklik di pemrograman menggunakan Python. Oleh karena itu, dapat ditentukan pula semua grup faktornya. Perhatikan contoh berikut, yang menunjukkan semua subgroup siklik di grup $(\mathbf{Z}_{72},+)$ yang dibentuk dari semua faktor 72.

Contoh 2.7.

Misalkan diberikan grup $\mathbf{Z}_{72}=\{0,1,2,...,71\}$. *Ingat bahwa faktor-faktor dari n adalah* $\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$, *sehingga diperoleh semua subgrup di* $\mathbf{Z}_{70}$ *adalah:*

$\langle 1\rangle=\{0,1,...,71\}$ *order* 72

$\langle 2\rangle=\{0,2,...,70\}$ *order* 36

$\langle 3\rangle=\{0,3,...,69\}$ *order* 24

$\langle 4\rangle=\{0,4,...,68\}$ *order* 18

$\langle 6\rangle=\{0,6,...,66\}$ *order* 12

$\langle 8\rangle=\{0,8,16,24,32,40,48,56,64\}$ *order* 9

$\langle 9\rangle=\{0,9,18,27,36,45,54,63\}$ *order* 8

$\langle 12\rangle=\{0,12,24,36,48,60\}$ *order* 6

$\langle 18\rangle=\{0,18,36,54\}$ *order* 4

$\langle 24\rangle=\{0,24,48\}$ *order* 3

$\langle 36\rangle=\{0,36\}$ *order* 2

$\langle 72\rangle=\{0\}$ *order* 1

3. PENGERTIAN SUBGRUP NORMAL DAN GRUP FAKTOR

Dalam sesi ini akan dikaji pengertian subgroup normal dari suatu grup $(G,*)$ dan bagaimana cara mengujinya. Setelah itu akan dikonstruksi suatu grup faktor melalui suatu subgroup normal.

Definisi 3.1. Gallian [7].

Suatu subgrup H di grup $(G,*)$ *disebut subgrup normal, dinotasikan* $H \lhd G$, *jika berlaku* $a*H=H*a$ *untuk setiap* $a\in G$.

Ingat kembali bahwa di suatu grup $(G,*)$, untuk menunjukkan suatu subgroup di dalamnya normal atau tidak, maka harus ditunjukkan $x*H*x^{-1}\subseteq H$ untuk setiap $x\in G$. Selanjutnya akan diberikan pengertian grup faktor dari suatu grup yang dikonstruksi melalu subgrup normalnya.

Lemma 3.2. Gallian [7].

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgroup normal di G. Himpunan $G/H=\{a*H \mid a\in G\}$ *adalah grup dengan operasi* $(a*H)*(b*H)=(a*b)*H$ *.untuk setiap* $a,b\in G$.

Perhatikan bahwa $(\mathbf{Z}_n,+)$ adalah grup komutatif, dan dapat ditunjukkan bahwa setiap subgroup di grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ adalah subgrup normal. Akibatnya, dari setiap subgrup siklik di dalamnya dapat ditentukan pula grup faktornya. Perhatikan contoh berikut, yang menunjukkan grup faktor dari semua subgrup siklik di grup $(\mathbf{Z}_{10},+)$.

Contoh 3.3.

Misalkan diberikan grup $\mathbf{Z}_{10}=\{0,1,2,...,9\}$. *Ingat bahwa faktor dari n adalah* $\{1,2,5,10\}$, *sehingga diperoleh grup faktor dari semua subgrup di grup* $(\mathbf{Z}_{10},+)$ *adalah:*

$\langle 1\rangle=\{0,1,\ldots,9\}$ *order* 10

==> $G/\langle 1\rangle=\{\{0,1,\ldots,9\}\}$ *order* 1

$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8\}$ *order* 5

==> $G/\langle 2\rangle=\{\{0,2,4,6,8\},\{1,3,5,7,9\}\}$ *order* 2

$\langle 5\rangle=\{0,5\}$ *order* 2

==> $G/\langle 5\rangle=\{\{0,5\},\{1,6\},\{2,7\},\{3,8\},\{4,9\}\}$ *order* 5

$\langle 10\rangle=\{0\}$ *order* 1

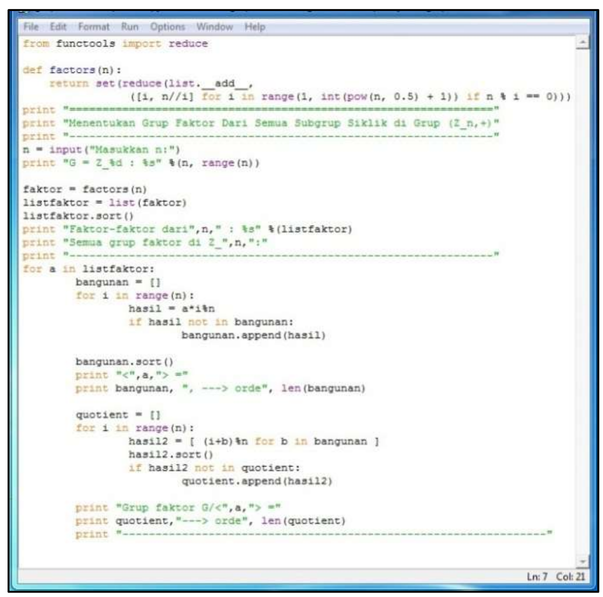
==> $G/\langle 10\rangle=\{\{0\},\{1\},\ldots,\{9\}\}$ *order* 10

4. PYTHON

Dalam sesi ini akan dikaji pemrograman dalam menentukan grup faktor dari semua subgroup siklik dari grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ dengan menggunakan Python 2.7.14, yang merupakan hasil utama dari tulisan ini. Hal-hal yang menjadi dasar dalam pembuatan program adalah Lemma 2.6 dan 3.2. di atas. Berikut adalah tampilan pemrograman yang digunakan dalam tulisan ini.

```
from functools import reduce

def factors(n):
    return set(reduce(list.__add__,
             ([i, n//i] for i in range(1, int(pow(n, 0.5) + 1))
if n % i == 0)))
print "===================================="
print "Menentukan Grup Faktor Dari Semua Subgrup
Siklik di Grup (Z_n,+)"
print "-----------------------------------------------------"
n = input("Masukkan n:")
print "G = Z_%d : %s" %(n, range(n))

faktor = factors(n)
listfaktor = list(faktor)
listfaktor.sort()
print "Faktor-faktor dari",n," : %s" %(listfaktor)
print "Semua grup faktor di Z_",n,":"
print "-----------------------------------------------------"
for a in listfaktor:
        bangunan = []
        for i in range(n):
                hasil = a*i%n
                if hasil not in bangunan:
                        bangunan.append(hasil)

        bangunan.sort()
        print "<",a,"> ="
        print bangunan, ", ---> order", len(bangunan)

        quotient = []
        for i in range(n):
                hasil2 = [ (i+b)%n for b in bangunan
]
                hasil2.sort()
                if hasil2 not in quotient:
                        quotient.append(hasil2)

        print "Grup faktor G/<",a,"> ="
        print quotient,"---> order", len(quotient)
        print "-------------------------------------------"
```

Berikut adalah tampilan program menggunakan Python. dan contoh keluaran dari program di atas, yaitu untuk grup $(\mathbf{Z}_{30},+)$ untuk versi OS Windows. Tampilan keluaran berikut akan menutup sesi ini.




```
from functools import reduce

def factors(n):
    return set(reduce(list.__add__,
                ([i, n//i] for i in range(1, int(pow(n, 0.5) + 1)) if n % i == 0)))
print "================================================================="
print "Menentukan Grup Faktor Dari Semua Subgrup Siklik di Grup (Z_n,+)"
print "-----------------------------------------------------------------"
n = input("Masukkan n:")
print "G = Z_%d : %s" %(n, range(n))

faktor = factors(n)
listfaktor = list(faktor)
listfaktor.sort()
print "Faktor-faktor dari",n," : %s" %(listfaktor)
print "Semua grup faktor di Z_",n,":"
print "-----------------------------------------------------------------"
for a in listfaktor:
        bangunan = []
        for i in range(n):
                hasil = a*i%n
                if hasil not in bangunan:
                        bangunan.append(hasil)

        bangunan.sort()
        print "<",a,"> ="
        print bangunan, ", ---> orde", len(bangunan)

        quotient = []
        for i in range(n):
                hasil2 = [ (i+b)%n for b in bangunan ]
                hasil2.sort()
                if hasil2 not in quotient:
                        quotient.append(hasil2)

        print "Grup faktor G/<",a,"> ="
        print quotient,"---> orde", len(quotient)
        print "-----------------------------------------------------------------"
```

```
===========================================
Menentukan Grup Faktor Dari Semua Subgrup Siklik
di Grup (Z_n,+)
-------------------------------------------------------------------
Masukkan n:30
G = Z_30 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,
29]
Faktor-faktor dari 30  : [1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]
Semua grup faktor di Z_ 30 :
------------------------------------------------------------
< 1 > =
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29] , --->
order 30
Grup faktor G/< 1 > =
[[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]] --->
order 1
------------------------------------------------------------
< 2 > =
[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28] , ---
> order 15
Grup faktor G/< 2 > =
[[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28], [1,
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]] --->
order 2
------------------------------------------------------------
< 3 > =
[0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27] , ---> order 10
Grup faktor G/< 3 > =
[[0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27], [1, 4, 7, 10, 13, 16,
19, 22, 25, 28], [2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29]] --->
order 3
------------------------------------------------------------
< 5 > =
[0, 5, 10, 15, 20, 25] , ---> order 6
Grup faktor G/< 5 > =
[[0, 5, 10, 15, 20, 25], [1, 6, 11, 16, 21, 26], [2, 7, 12,
17, 22, 27], [3, 8, 13, 18, 23, 28], [4, 9, 14, 19, 24, 29]]
---> order 5
------------------------------------------------------------
< 6 > =
[0, 6, 12, 18, 24] , ---> order 5
Grup faktor G/< 6 > =
[[0, 6, 12, 18, 24], [1, 7, 13, 19, 25], [2, 8, 14, 20, 26],
[3, 9, 15, 21, 27], [4, 10, 16, 22, 28], [5, 11, 17, 23, 29]]
---> order 6
------------------------------------------------------------
< 10 > =
[0, 10, 20] , ---> order 3
Grup faktor G/< 10 > =
[[0, 10, 20], [1, 11, 21], [2, 12, 22], [3, 13, 23], [4, 14,
24], [5, 15, 25], [6, 16, 26], [7, 17, 27], [8, 18, 28], [9,
19, 29]] ---> order 10
------------------------------------------------------------
< 15 > =
[0, 15] , ---> order 2
Grup faktor G/< 15 > =
[[0, 15], [1, 16], [2, 17], [3, 18], [4, 19], [5, 20], [6, 21],
[7, 22], [8, 23], [9, 24], [10, 25], [11, 26], [12, 27], [13,
28], [14, 29]] ---> order 15
------------------------------------------------------------
< 30 > =
[0] , ---> order 1
Grup faktor G/< 30 > =
[[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11],
[12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21],
[22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29]] ---> order 30
------------------------------------------------------------
>>>
```

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] A First Course in Abstract Algebra, Sixth Edition, John B. Fraleigh, Addison-Wesley, New York, 2000

[2] Abstract Algebra, 3rd Edition, David S. Dummit, 2004

[3] Abstract Algebra, 3rd Edition, Herstein I., Prenntice, 1996

[4] Advanced Modern Algebra, Rotman, J. J., Prentice Hall, New York, 2003

[5] Algebra, A Graduate Course, I. Martin Isaacs, 1994

[6] Algebra: An Approach Via Module Theory, Adkins Weintraub, 1992

[7] Contemporary Abstract Algebra, 9th Edition, J.A.Gallian, USA, 2017

[8] Fundamentals of Abstract Algebra, D.S. Malik, John N. Moderson and M.K. Sen, USA, 1997

[9] Python. (2018, 30 April) https://www.python.org/

[10] Google. (2018, 30 April) https://play.google.com/store/apps/details?id=org.qpython.qpy&hl=en