

SKIM TRIGONOMETRI PADA JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT BAGI SISWA KELAS XII SMA KRISTEN 1 SALATIGA

Maria Widya Bektı Nurani¹, Kriswandani²

Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana¹

Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana²

¹Email: 202014099@student.uksw.edu

¹Email: mariawidya.nurani39@gmail.com

ABSTRACT

This research is a qualitative descriptive research that aims to know know trigonometric scheme on the number and difference of two angles for Student Class XII SMA Kristen 1 Salatiga. The sample of this research is XII SMA Kristen 1 Salatiga consisting of 6 students (1 male and 5 female students). The results of this study indicate that there are nine trigonometric schemes on the number and difference of two angles possessed by students in working on trigonometric questions on the number and difference of two angles, that is scheme outlines the sum and difference of the two angles, scheme of application of the pythagoras formula, the scheme outlines with a special angle, the scheme of coherent multiplication on the tangent function, scheme quadrant method, scheme of use of example, two-tier multiplication schemes, the application scheme of identity formula, and scheme distributive properties multiplication against subtraction.

Keywords: *scheme, trigonometry, number and different of two angles*

ABSTRAK

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif yang bertujuan untuk mengetahui mengetahui skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut bagi Siswa Kelas XII SMA KRISTEN 1 Salatiga. Sampel dari penelitian ini adalah siswa kelas XII SMA Kristen 1 Salatiga yang terdiri dari 6 siswa (1 siswa laki-laki dan 5 siswa perempuan). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat sembilan skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang dimiliki oleh siswa dalam mengerjakan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut, yakni skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, skim penerapan rumus pythagoras, skim menguraikan dengan sudut istimewa, skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, skim metode kuadran, skim penggunaan permisalan, skim perkalian dua suku, skim penerapan rumus identitas, dan skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan.

Kata Kunci: *skim, Trigonometri, Jumlah dan Selisih Dua Sudut*

A. PENDAHULUAN

Pikiran manusia mempunyai struktur yang disebut skema atau skemata (jamak) yang sering disebut dengan struktur kognitif (Piaget dalam Siswanto, 2008). Skema adalah suatu struktur mental seseorang dimana ia secara intelektual beradaptasi dengan lingkungan sekitarnya (Suparno, 2001:21). Proses pembentukan skema ini merupakan proses konstruksi kognitif lingkungan sekitar melalui proses adaptasi sehingga pembentukan skema ini bersifat tentatif dan dinamis. Asimilasi merupakan proses kognitif dimana seseorang mengintegrasikan persepsi, konsep, atau pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada didalam pikirannya. Proses asimilasi yang terjadi pada siswa akan menggabungkan informasi baru yang telah diperolehnya dari pengalaman belajar ke dalam pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya. Akomodasi merupakan proses modifikasi struktur kognitif yang sudah ada dari pengalaman baru tetapi tidak secara langsung dapat diasimilasikan pada struktur kognitif (skim).

Asimilasi dan akomodasi merupakan dua proses yang sama-sama dibutuhkan, sehingga melalui kedua proses tersebut siswa tidak bergantung kepada pengamatan, tetapi lebih bergantung pada berpikir (Sagala dalam Kristanto, 2014). Pada proses perkembangan kognitif antara asimilasi dan akomodasi diperlukan adanya keseimbangan yang disebut *ekuilibrium*, yaitu pengaturan diri mekanis untuk mengatur keseimbangan proses asimilasi dan akomodasi. Jika tidak adanya keseimbangan antara proses asimilasi dan akomodasi maka disebut *disekuilibrium* (Suparno, 2001). Menurut Suparno (2001), teori konstruktivisme menjelaskan bahwa pengetahuan seseorang adalah

bentukan (konstruksi) orang itu sendiri. Faham konstruktivisme mendefinisikan skim sebagai bagian yang mendasar dalam pembentukan suatu pengetahuan yang dipunyai oleh seseorang individu (von Glasersfeld, 1980; Piaget, 1980; Steff & Cobb, 1984 dalam Sutriyono, 2007).

Konstruktivisme merupakan salah satu sifat pengetahuan yang menekankan bahwa pembentukan pengetahuan seseorang merupakan konstruksi siswa itu sendiri (Suparno, 1997). Menurut konstruktivisme, skim merupakan bahan dasar pengetahuan yang dipunyai oleh seseorang individu (Von Glasersfeld, 1980; Piaget, 1980; Steffe & Cobb, 1984 dalam Sutriyono, 2012). Piaget dalam Sutriyono (2012) mendefinisikan skim sebagai corak tingkah-laku atau tindakan umum yang dapat diulangi atau digeneralisasikan melalui penggunaan obyek-obyek baru.

Skim merupakan tindakan operasi yang digunakan untuk menggeneralisasikan obyek tertentu (Hackenberg, Tillema, 2009 dalam Kristanto, 2014). Pola-pola tindakan dan operasi yang berlaku secara berulang kali dan relatif tetap dalam setiap situasi yang diperhatikan, dapat menjadi dasar untuk pembentukan model skim yang dimiliki oleh siswa (Sutriyono, 2012). Piaget dalam Glaserfeld (1996) menyatakan bahwa dalam membangun skim terdapat tiga bagian yaitu pencetus, tindakan dan operasi, serta hasil yang diharapkan. Bagian pertama yaitu pencetus, suatu rangsangan hanya dianggap sebagai pencetus suatu skim apabila rangsangan tersebut diasimilasikan ke dalam struktur kognitif yang dipunyai oleh seorang individu dan struktur itulah yang mencetuskan gerak balas. Bagian kedua yakni tindakan dan operasi, dalam tindakan merupakan aktivitas yang melibatkan aktivitas fisik, sedangkan operasi aktivitas yang memusatkan operasi mental. Bagian ketiga yaitu hasil yang diharapkan, skim matematika yang dipunyai siswa bukan merupakan sesuatu yang dapat diperhatikan secara langsung. Skim tersebut hanya merupakan wujud dari pikiran siswa. Wujud dari pikiran siswa tersebut apakah berbentuk tindakan atau operasi yang menjadi kebiasaan bagi siswa tersebut (Sutriyono, 2012). Skim matematika yang dibangun siswa digunakan guru untuk mengetahui model struktur kognitif siswa sehingga guru dapat memberikan bimbingan kepada siswa dalam memecahkan suatu masalah (Mc Closkey, 2009).

Skim matematika yang dimiliki setiap siswa berbeda-beda, terbukti dengan beberapa hasil penelitian yang dilakukan. Hasil penelitian yang dilakukan oleh Sutriyono (2012) menunjukkan bahwa siswa pada peringkat kognitif yang sama tidak selalu mempunyai skim pengurangan bilangan bulat yang sama pula. Selain itu, terdapat pula hasil penelitian yang dilakukan oleh Rohkhayani (2014) yang menunjukkan bahwa siswa pada tingkat kognitif yang sama tidak selalu mempunyai skim pengurangan bilangan pecahan yang sama dan tidak selalu pengajaran yang diberikan guru dipahami sama pula oleh semua siswa. Terdapat pula penelitian yang dilakukan oleh Kristanto (2014) yang menyatakan bahwa siswa dalam membangun dan mengkonstruksi sebuah pengetahuan, memiliki model dan proses berpikir yang berbeda-beda antara siswa yang satu dengan yang lainnya yang disebut dengan skim perkalian bilangan pecahan. Hal tersebut dapat dilihat berdasarkan hasil penelitiannya yang menyatakan bahwa terdapat 12 jenis skim yang berbeda yang dimiliki oleh siswa dan diketahui adanya subskim, subsubskim, serta subsubsubskim pada beberapa skim yang dimiliki siswa. Oleh karena itu, siswa mempunyai lebih dari skim dalam pengerjaan operasi perkalian bilangan pecahan.

SMA Kristen 1 Salatiga merupakan salah satu sekolah yang siswa-siswanya mempunyai keberagaman pengetahuan atau skim pada materi trigonometri khususnya pada jumlah dan selisih dua sudut. Hal tersebut dapat dilihat dari cara pengerjaan siswa saat peneliti melakukan pra penelitian mengenai trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Sebagian siswa menjawab soal $\sin 105^\circ$ dengan menguraikan 105° menjadi $(60^\circ + 45^\circ)$ sehingga siswa menjawab $\sin (60^\circ + 45^\circ)$ kemudian langsung memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut yakni $\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$. Ada pula yang menguraikan 105° menjadi $\sin (90^\circ + 15^\circ)$ kemudian siswa menerapkan dalam bentuk kuadran sehingga menjadi $\cos 15^\circ$ selanjutnya siswa baru menguraikan $\cos 15^\circ$ menjadi $\cos (45^\circ - 30^\circ)$ baru memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut yakni $\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$. Ada pula yang yang menguraikan 105° menjadi $\sin (180^\circ - 75^\circ)$ kemudian siswa menerapkan dalam bentuk kuadran sehingga menjadi $\sin 75^\circ$ selanjutnya siswa baru menguraikan $\sin 75^\circ$ menjadi $\sin (45^\circ + 30^\circ)$ baru memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut yakni $\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$.

Berdasarkan latar belakang tersebut, keberagaman skim yang dimiliki siswa membuat guru harus mengetahui corak berpikir siswa, sehingga guru dapat mendiagnosis kekuatan dan kelemahan yang dihadapi siswa ketika mempelajari trigonometri. Oleh karena itu, dilakukan suatu penelitian yang berjudul Skim Trigonometri pada Jumlah dan Selisih Dua Sudut bagi Siswa Kelas XII SMA Kristen 1 Salatiga. Permasalahan yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut bagi siswa kelas XII SMA Kristen 1 Salatiga?

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dirumuskan, maka tujuan penelitian adalah untuk mengetahui skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut bagi siswa kelas XII SMA Kristen 1 Salatiga. Manfaat teoritis dalam penelitian ini adalah memberikan referensi atau masukan untuk perkembangan ilmu pengetahuan khususnya mengenai skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut bagi siswa SMA. Hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat bagi guru sebagai pertimbangan dalam menentukan pola pengajaran dan bimbingan sesuai corak berpikir yang dimiliki siswa. Dengan demikian, hasil penelitian ini juga secara langsung bermanfaat bagi siswa agar siswa dapat dibantu dalam mengubah pola pikir yang salah, sehingga pihak sekolah juga diharapkan untuk mengambil keputusan yang tepat dalam peningkatan kualitas pengajaran serta menjadi bahan pertimbangan dalam mengambil kebijakan inovasi pembelajaran matematika di sekolah. Penelitian ini juga bermanfaat sebagai bahan pertimbangan peneliti lain untuk mengkaji lebih dalam mengenai corak berpikir siswa.

B. PEMBAHASAN

METODE

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian kualitatif deskriptif bertujuan untuk pemecahan masalah secara sistematis dan factual mengenai fakta-fakta dan sifat-sifat populasi (Narbuko dan Abu Achmadi, 2007:44). Teknik pengumpulan data dilakukan secara *triangulasi*, analisis data bersifat induktif/kualitatif dan hasil penelitian kualitatif lebih menekankan makna daripada generalisasi (Sugiyono, 2014). Subyek dalam penelitian ini ditentukan dengan menggunakan *purposive sampling*, yaitu teknik pengambilan sampel sumber data dengan pertimbangan tertentu (Sugiyono, 2012). Subyek dalam penelitian ini adalah siswa kelas XII SMA Kristen 1 Salatiga yang terdiri dari 6 siswa yang di dalamnya terdapat 5 siswa perempuan dan 1 siswa laki-laki yaitu LV, GY, ND, ES, PA, dan DK dengan berbagai kriteria. Kriteria tersebut adalah (1) kesanggupan subyek terlibat secara aktif dalam penelitian; (2) subyek bersedia meluangkan waktu untuk wawancara; (3) memperoleh izin dari pihak sekolah dan orangtua subyek; (4) kepercayaan orang tua dan guru bahwa subyek akan melibatkan diri secara aktif dalam wawancara. Penelitian ini dilakukan di SMA Kristen 1 Salatiga yang beralamat di Jalan Osamaliki No.32 Mangunsari Kecamatan Sidomukti Kota Salatiga Jawa Tengah. Pengambilan data penelitian ini dilakukan pada bulan Juli sampai Agustus 2017.

Teknik pengumpulan data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan observasi partisipatif, wawancara klinis dan dokumentasi. Instrumen dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri, tetapi dalam penelitian ini terdapat instrumen pendukung yaitu soal uraian. Analisis data yang digunakan adalah analisis data model Miles Dan Huberman, komponen analisis datanya adalah data *reduction*, data *display*, dan *conclusion drawing/verification* (Sugiyono, 2012). Tahap awal dalam analisis data adalah data *collection* dimana data yang diperoleh dari hasil rekaman wawancara dan video selama siswa mengerjakan soal trigonometri jumlah dan selisih dua sudut yang ditulis secara rinci, teliti dan jelas (Sugiyono, 2012). Hasil data *collection* kemudian direduksi untuk menentukan pola-pola perilaku yang ditunjukkan siswa pada saat mengerjakan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Setelah data direduksi, tahap selanjutnya adalah *display* atau penyajian data. Penelitian kualitatif menyajikan data yang bisa dilakukan dalam bentuk uraian singkat, bagan, hubungan antar kategori, *flowchart* dan sejenisnya (Sugiyono, 2012). Penyajian data dalam penelitian ini adalah mengelompokkan pola-pola perilaku yang ditunjukkan siswa pada saat mengerjakan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut ke dalam pola yang sejenis untuk mempermudah mengelompokkan jenis-jenis skim yang dimiliki siswa. Tahap terakhir adalah penarikan kesimpulan atau verifikasi. Kesimpulan dalam penelitian kualitatif merupakan temuan baru yang sebelumnya belum pernah ada. Temuan dapat berupa deskripsi atau gambaran suatu obyek yang sebelumnya masih remang-remang atau gelap sehingga setelah diteliti menjadi jelas, dapat berupa hubungan kausal atau interaktif, hipotesis atau teori (Sugiyono, 2012).

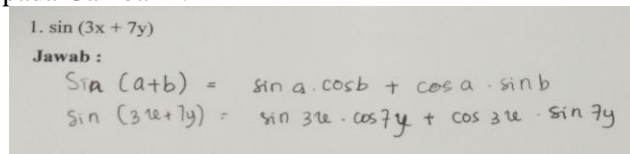
Penarikan kesimpulan dalam penelitian ini adalah mengelompokkan jenis skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil pengerjaan dan wawancara subyek dapat ditemukan sebanyak sembilan skim yang digunakan subyek ketika mengerjakan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut dengan empat indikator. Keempat indikator tersebut adalah menentukan rumus jumlah dan selisih dua sudut dengan cara menguraikan, menentukan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut dengan melibatkan nilai perbandingan trigonometri, menyelesaikan soal mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator, menyelesaikan soal pembuktian mengenai jumlah dan selisih dua sudut. Berdasarkan hasil pengerjaan dan wawancara subyek dalam menyelesaikan empat indikator soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut diperoleh sembilan skim, yaitu: 1) skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut; 2) skim penerapan rumus phytagoras; 3) skim menguraikan dengan sudut istimewa; 4) skim perkalian sekawan pada fungsi tangen; 5) skim metode kuadran; 6) skim penggunaan permisalan; 7) skim perkalian dua suku; 8) skim penerapan rumus identitas; 9) skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. Berikut ini uraian skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut dengan tiga komponen yaitu pencetus, tindakan dan operasi serta hasil yang diharapkan.

1. Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut

Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut ini digunakan oleh subyek ND, GY, LV, ES, dan DK dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang berbentuk $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$. Pencetus untuk skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut adalah adanya anggapan bahwa dengan menguraikan soal ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut dapat langsung menjawab pertanyaan yang telah diberikan. Tindakan dan operasi untuk skim ini adalah dengan menuliskan rumus jumlah dan selisih dua sudut sesuai dengan soal yang diberikan, dan itu digunakan oleh satu subyek yaitu PA. Hasil yang diharapkan untuk skim ini adalah dapat menentukan nilai-nilai trigonometri seperti sinus, cosinus, tangen dengan menguraikannya terlebih dahulu. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 1.



1. $\sin(3x + 7y)$
Jawab :
 $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
 $\sin(3x+7y) = \sin 3x \cdot \cos 7y + \cos 3x \cdot \sin 7y$

Gambar 1.

Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut

2. Skim penerapan rumus phytagoras

Skim penerapan rumus phytagoras ini digunakan untuk menyelesaikan soal uraian yang melibatkan nilai perbandingan trigonometri. Skim penerapan rumus phytagoras ini digunakan oleh subyek ND, GY, ES, PA, dan DK dalam menyelesaikan uraian trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang melibatkan nilai perbandingan trigonometri. Pencetus untuk skim penerapan rumus phytagoras adalah terdapat sudut yang harus diketahui dengan nilai perbandingan trigonometri. Tindakan dan operasi dalam skim ini adalah mencari nilai perbandingan sudut trigonometri yang belum diketahui dengan menggunakan rumus phytagoras. Hasil yang diharapkan untuk skim ini adalah dapat menentukan nilai-nilai trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 2.

Diketahui $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\tan \beta = \frac{8}{15}$ dengan α dan β sudut lancip, tentukan

7. $\sin(\alpha + \beta)$

Jawab :

$\sin \alpha = \frac{12}{13}$ $\sin \beta = \frac{8}{17}$
 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ $\cos \beta = \frac{15}{17}$
 $\tan \alpha = \frac{12}{5}$ $\tan \beta = \frac{8}{15}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{15}{17} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{17}$$

$$= \frac{180}{221} + \frac{40}{221}$$

$$= \frac{220}{221}$$

Gambar 2.
Skim penerapan rumus pythagoras

3. Skim menguraikan dengan sudut istimewa

Skim menguraikan dengan sudut istimewa digunakan oleh subyek GY, LV, ES, dan PA untuk menyelesaikan soal uraian trigonometri mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator. Pencetus pada skim menguraikan dengan sudut istimewa ini adalah sudut yang bukan merupakan sudut istimewa dapat diuraikan menjadi sudut-sudut istimewa sehingga dapat menentukan hasilnya tanpa menggunakan kalkulator. Tindakan dan operasi dalam skim ini adalah menguraikan sudut yang ditanyakan dengan sudut-sudut istimewa. Hasil yang diharapkan untuk skim ini adalah dapat menentukan nilai-nilai trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 3.

18. $\sin 75^\circ$

Jawab :

$$\sin 75 = \sin (45 + 30)$$

$$= \sin 45 \cdot \cos 30 + \cos 45 \cdot \sin 30$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{6} + \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Gambar 3.
Skim menguraikan dengan sudut istimewa

4. Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen

Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen juga digunakan oleh semua subyek untuk menyelesaikan soal uraian trigonometri mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator khususnya pada fungsi tangen. Pencetus pada skim perkalian sekawan pada fungsi tangen ini adalah penyebut pada tangen (setelah menghitung nilai tangen dengan sudut istimewa) dapat disederhanakan nilainya. Tindakan dan operasi dalam skim ini adalah mengalikan penyebut dengan perkalian sekawannya. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah penyederhanaan penyebut untuk menghilangkan bilangan *imaginer* (nilai akarnya). Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 4.

25. $\tan 15^\circ$

Jawab :

$$\tan (45 - 30)$$

$$= \frac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \cdot \tan 30}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{3 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{2}$$

Gambar 4.
Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen

5. Skim metode kuadran

Skim metode kuadran digunakan oleh subyek GY, LV, dan PA dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator dengan sudut bukan sudut istimewa. Pencetus skim metode kuadran ini adalah sudut yang bukan sudut istimewa dapat ditentukan nilainya tanpa harus memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut. Tindakan dan operasi pada skim ini adalah dengan menggunakan metode

kuadran tanpa harus memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah menentukan nilai sinus, cosinus, dan tangen dengan mudah tanpa harus memasukkan rumus jumlah dan selisih dua sudut. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 5.

26. $\text{Cos } 270^\circ$
Jawab :
 $\text{Cos } (360 - 90)$
 $= -\text{Cos } 90$
 $= 0$

Gambar 5.
Skim metode kuadran

6. Skim penggunaan permisalan

Skim penggunaan permisalan digunakan oleh subyek GY, ES, PA, dan DK dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri pembuktian mengenai jumlah dan selisih dua sudut. Pencetus skim penggunaan permisalan ini adalah soal yang akan dibuktikan dapat diselesaikan dengan memisalkannya terlebih dahulu. Tindakan dan operasi pada skim ini adalah memisalkan soal yang akan dibuktikan dengan suatu abjad/huruf tertentu. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah memudahkan dalam menyelesaikan soal pembuktian trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 6.

30. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
Jawab :
 $(\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$
 Misal $\rightarrow \frac{a}{a} \quad \frac{b}{b} \quad \frac{a}{a} \quad \frac{b}{b}$
 $\Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 $= (\sin a \cos b)^2 - (\cos a \sin b)^2$
 $= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b$
 $= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$
 $= \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - (\sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b)$
 $= \sin^2 a - \sin^2 b \quad \text{• terbukti}$

Gambar 6.
Skim penggunaan permisalan

7. Skim perkalian dua suku

Skim perkalian dua suku digunakan oleh semua subyek dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri pembuktian mengenai jumlah dan selisih dua sudut. Pencetus skim perkalian dua suku ini adalah adanya anggapan bahwa perkalian dua suku berlaku pada bentuk tersebut, jika $(a + b)$ dikalikan dengan $(a - b)$ sama artinya dengan $a^2 - b^2$. Tindakan dan operasi pada skim ini adalah mengalikan dua suku menjadi seperti bentuk pembuktinya. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah mengubah bentuk awal/soal menjadi bentuk yang akan dibuktikan. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 7.

30. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
Jawab :
 $(\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$
 Misal $\rightarrow \frac{a}{a} \quad \frac{b}{b} \quad \frac{a}{a} \quad \frac{b}{b}$
 $\Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 $= (\sin a \cos b)^2 - (\cos a \sin b)^2$
 $= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b$
 $= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$
 $= \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - (\sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b)$
 $= \sin^2 a - \sin^2 b \quad \text{• terbukti}$

Gambar 7.
Skim perkalian dua suku

8. Skim penerapan rumus identitas

Skim penerapan rumus identitas digunakan oleh semua subyek dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri pembuktian mengenai jumlah dan selisih dua sudut. Pencetus skim penerapan rumus identitas ini adalah adanya anggapan bahwa penerapan rumus identitas berlaku pada bentuk tersebut, jika terdapat bentuk $\cos^2 a$ sama artinya dengan $1 - \sin^2 a$. Tindakan dan operasi pada skim ini adalah mengubahnya ke bentuk yang akan dibuktikan dengan rumus identitas. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah memudahkan untuk mencari nilai pembuktiannya. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 8.

Buktikanlah nilai dibawah ini :

$$30. \sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Jawab : misal :

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b) (\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= (\sin a \cos b)^2 - (\cos a \sin b)^2$$

$$= \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$$

dikurahi ke rumus identitas.

$$= \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

Gambar 8.
Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan

9. Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan

Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan digunakan oleh semua subyek dalam menyelesaikan soal uraian trigonometri pembuktian mengenai jumlah dan selisih dua sudut. Pencetus skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan ini adalah adanya anggapan bahwa sifat distributif perkalian terhadap pengurangan berlaku pada bentuk tersebut, jika terdapat bentuk $\sin^2 a$ dikali dengan $1 - \sin^2 a$ sama artinya dengan $(\sin^2 a \times 1) - (\sin^2 a \times \sin^2 a)$. Tindakan dan operasi pada skim ini adalah menjabarkan sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. Hasil yang diharapkan dalam skim ini adalah mengubah bentuk menjadi nilai yang terbukti pada soal pembuktiannya. Contoh pengerjaan subyek dapat dilihat pada Gambar 9.

Buktikanlah nilai dibawah ini :

$$30. \sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Jawab :

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b) (\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow (\sin a \cos b)^2 - (\cos a \sin b)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \sin^2 b$$

$$\Rightarrow \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$$

$$\Rightarrow \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$

$$\Rightarrow \sin^2 a - \sin^2 b$$

Gambar 9.
Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan

Skim-skim tersebut digunakan secara berbeda oleh masing-masing siswa dalam konteks yang berbeda-beda dan setiap siswa memiliki skim yang berbeda dengan siswa lainnya. **ND** memiliki Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, Skim penerapan rumus phytagoras, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim perkalian dua suku, Skim penerapan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. **GY** memiliki Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, Skim penerapan rumus phytagoras, Skim menguraikan dengan sudut istimewa, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim metode kuadran, Skim penggunaan permisalan, Skim perkalian dua suku, Skim menerapkan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. **LV** memiliki Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, Skim menguraikan dengan sudut istimewa, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim metode kuadran, Skim perkalian dua suku, Skim menerapkan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. **ES** memiliki Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, Skim penerapan rumus phytagoras, Skim menguraikan dengan sudut istimewa, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim penggunaan permisalan, Skim perkalian dua suku, Skim menerapkan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. **PA** memiliki Skim penerapan rumus phytagoras, Skim menguraikan dengan sudut istimewa, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim metode kuadran, Skim penggunaan permisalan, Skim perkalian dua suku, Skim menerapkan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. **DK** memiliki Skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, Skim penerapan rumus phytagoras, Skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, Skim penggunaan permisalan, Skim perkalian dua suku, Skim menerapkan rumus identitas, dan Skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan.

TEMUAN LAIN

Selain skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang telah ditemukan, terdapat beberapa temuan lain yang berkaitan dengan makna dan cara subyek menyelesaikan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Berikut ini adalah temuan lain tersebut :

1. Penghafalan rumus jumlah dan selisih dua sudut

Dua subyek (ND dan DK) saat mengerjakan soal uraian trigonometri mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator, dua subyek tersebut tidak terlebih dulu menggunakan cara menguraikan ke bentuk sudut istimewa tetapi langsung menjawab nilai dari fungsi trigonometri yang ditanyakan. Hal ini dikarenakan subyek sudah menguasai sudut-sudut lebih dari 90^0 .

2. Penambahan tanda negatif pada fungsi trigonometri

Beberapa subyek yang dijadikan subyek penelitian merasa bingung saat diberikan soal mengenai jumlah dan selisih dua sudut tanpa menggunakan kalkulator dengan sudut diberi tanda negatif seperti $\sin(-15^0)$. Subyek awalnya sempat bingung mengerjakan soal tersebut namun akhirnya subyek bisa mengerjakan soal tersebut dengan caranya masing-masing. Cara yang dilakukan subyek dalam menyelesaikan soal tersebut, yakni ada yang menggunakan sudut-sudut istimewa seperti $\sin(45^0-60^0)$ dan $\sin(30^0-45^0)$, adapula yang menggunakan cara $\sin(-15^0) = -\sin 15^0$ dan adapula yang menggunakan cara $\sin(-15^0) = -[\sin(45^0-30^0)]$.

C. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, pembahasan dan temuan dalam penelitian mengenai skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut, menunjukkan bahwa setiap siswa memiliki model dan proses berpikir yang berbeda dalam menyelesaikan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Hal itu menunjukkan bahwa model berpikir siswa antara satu dengan lainnya berbeda meskipun mengerjakan soal yang sama yang disebut dengan skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat sembilan skim yang dimiliki siswa dalam menyelesaikan soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut. Sembilan skim tersebut antara lain, skim menguraikan ke bentuk jumlah dan selisih dua sudut, skim penerapan rumus Pythagoras, skim menguraikan dengan sudut istimewa, skim perkalian sekawan pada fungsi tangen, skim metode kuadran, skim penggunaan permisalan, skim perkalian dua suku, skim menerapkan rumus identitas, skim sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. Sembilan skim tersebut menunjukkan bahwa tingkat kognitif siswa yang sama tidak selalu memiliki skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang sama pula serta pembelajaran yang diberikan oleh guru tidak selalu dipahami oleh siswa secara sama.

D. SARAN DAN REKOMENDASI

1. Saran Teoritis

Penelitian ini merupakan penelitian yang mendeskripsikan mengenai skim pada siswa dalam menyelesaikan trigonometri jumlah dan selisih dua sudut. Skim yang dimiliki siswa mempunyai kajian yang sangat penting karena dengan mengetahui skim yang dimiliki siswa, dapat dijadikan refleksi guru dalam proses pembelajaran. Demikian hendaknya perlu dilakukan penelitian tentang berbagai skim matematika yang dimiliki oleh siswa.

2. Saran Praktis

a. Bagi Guru

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi guru dalam memberikan pengajaran kepada siswa, karena siswa yang memiliki tingkat kognitif yang sama tidak selalu memiliki skim trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut yang sama pula. Sehingga, guru diharapkan dapat memberikan berbagai pendekatan dalam mengajar trigonometri jumlah dan selisih dua sudut berdasarkan skim yang dimiliki siswa.

b. Bagi Siswa

Siswa diharapkan mampu mengembangkan skim yang sudah dimilikinya dengan bimbingan dari guru serta giat berlatih mengerjakan soal-soal trigonometri pada jumlah dan selisih dua sudut.

DAFTAR PUSTAKA

- Glaserfield, Earnest Von. 1996. *Aspects of Radical Konstruktivis*. Spain: Gedisa Editorial
- Kristanto, Faustinus Adven. 2014. *Skim Perkalian Bilangan Pecahan Kelas VI SD Negeri Lopait 02 Tuntang*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana
- McCloskey, Andrea V., dkk. 2009. *Recognizing Schemes, Which Are Different From Strategies, Can Help Teachers Understand Their Students Thinking About Fractions. Using Steffe's Fraction*, pp. 44-50
- Narbuko, Cholid dan Abu Achmadi. 2007. *Metodologi Penelitian*. Jakarta:PT Bumi Aksara
- Rohkhayani, Erna Ayu. 2014. *Skim Pengurangan Bilangan Pecahan Pada Siswa Kelas IV SD N 02 Pulutan*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana
- Siswanto. 2008. *Implementasi Berbagai Teori Belajar dalam Pembelajaran Akuntansi*. Jurnal Ekonomi & Pendidikan Volume 5 Nomor 2, Hal 136-144
- Sugiyono. 2012. *Memahami Penelitian Kualitatif*. Bandung: Alfabeta
- Suparno. 1997. *Filsafat Konstruktivisme Dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius
- Suparno, Paul. 2001. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*. Yogyakarta: Kanisius
- Suparno, Paul. 2012. *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius
- Sutriyono. 2007. *Konstruktivisme Dalam Pendidikan Matematika*. Salatiga: UKSW
- Sutriyono. 2012. *Skim Pengurangan Bilangan Bulat Siswa SD Kelas 2 & 3*. Salatiga: UKSW